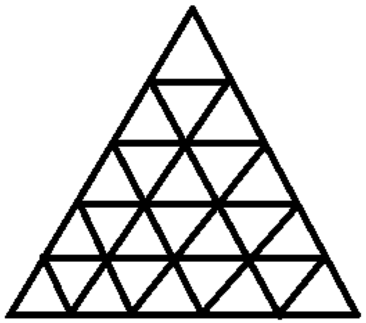
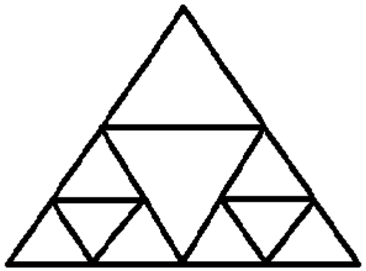
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
8 класс

▷ **1.** Можно ли разрезать правильный треугольник на
а) 2022; б) 2023; в) 2024
равносторонних треугольника?

Решение: Если сторону равностороннего треугольника разрезать на n частей, то треугольник можно разделить на n^2.



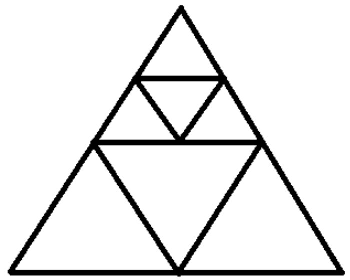
$$2022 = 4 \cdot 22^2 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 1$$



4 треугольника - разрезаем на 22^2 треугольников
2 треугольника - на 6^2
1 треугольник - на 3^2
1 треугольник - на 2^2
1 треугольник - без изменений
б) если известно разрезание для $n = 3k - 2$ (разрезая один из треугольников на 4 части по средним линиям), то известно и для $n = (3k - 2) - 1 + 4 = 3k + 1$.

$$2023 = 3 \cdot 667 + 1$$

в)

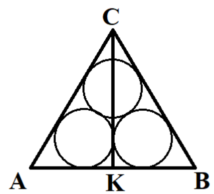


$$2024 = 4 \cdot 22^2 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 4^2$$

7 треугольников:
4 треугольника - разрезаем на 22^2 треугольников
2 треугольника - на 6^2
1 треугольник - на 4^2

▷ **2.** В правильный треугольник со стороной a вписаны три касающиеся друг друга равные окружности. Найдите их радиус.

Решение: Проведём медиану CK, она пройдёт через точку касания двух окружностей, касающихся сторон AB.



Тем самым они окажутся вписанными в равные $\triangle ACK$ и $\triangle BCK$. Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти, поделив удвоенную площадь треугольника на его периметр. В нашем случае $P_{\triangle ACK} = AC + CK + AK = a + \frac{a\sqrt{3}}{a} + \frac{a}{2} = a(3 + \sqrt{3})/2$, $2S_{\triangle ACK} = AK \cdot CK = a^2\sqrt{3}/4$.

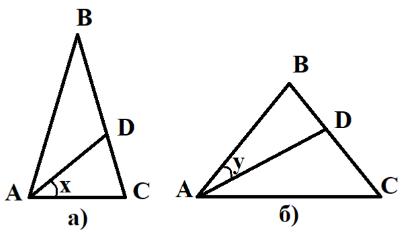
Ответ: $a \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

▷ **3.** В некотором месяце три субботы пришлись на нечётные числа. Какой день недели был 13 числа этого месяца?

Решение: Пусть А- первая из "нечётных"суббот, В - вторая, С - третья. От одной субботы месяца до другой может быть 7, 14, 21 или 28 дней. Однако число дней от одного нечётного числа месяца до другого его нечётного числа должно быть чётным. Поэтому от А до В должно быть 14 дней, а от А до С - 28 дней, тогда суббота А может приходится на 1-е число или на 3, если в месяце 31 день. Если А - 3-е, то В - 17-е, а С - 31-е, 13-е число - вторник. А если, А - 1-е число, В - 15-е число, С - 29-е число, а 13-е число четверг.
Ответ: Вторник (если в месяце 31 день) или четверг.

▷ **4.** Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна одной из его сторон. Какое наименьшее значение может принимать наибольший угол этого треугольника?

Решение: Возможны два случая:
а) биссектриса равна основанию треугольника
б) биссектриса равна боковой стороне треугольника



а) обозначим угол DAC через x. Поскольку AD - биссектриса и $AB = BC$, каждый из двух углов BAC и BCA равен $2x$. Но угол BCA равен также углу CDA, т.к. треугольник DAC по условию - равнобедренный. Теперь, находя сумму углов треугольника DAC, получаем $x + 2x + 2x = 180°$, откуда $x = 36°$. Далее без труда находим, что в треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 72°$, а $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 36°$.
Ответ: $72°, 72°, 36°$.
б) Обозначим угол BAD через y (как и в случае а)) каждый из двух углов BACи BCA равен $2y$. Из треугольника ABC найдём, что угол $ABC = 180° - 4y$. Теперь рассмотрим треугольник BAD. В нём $AB = AD$, поэтому угол ADB равен углу ABC. Находя теперь сумму углов треугольника BAD, получаем уравнение $2(180° - 4y) + y = 180°$, откуда $y = \frac{180°}{7}$. Находя теперь углы треугольника ABC, получаем $\angle A = \angle C = 2y = \frac{360°}{7}$ и $\angle B = 180° - 4y = \frac{540°}{7}$.
Ответ: $\frac{360°}{7}, \frac{360°}{7}, \frac{540°}{7}$.

Надо найти наименьшее значение из наибольших углов. Наибольшие углы - $\frac{540°}{7}$ и $72°$. Наименьшее значение - $72°$.
Ответ: 72.

▷ **5.** На доске записана сумма

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$$

а) Найдите эту сумму
б) Выберите из этой суммы несколько слагаемых так, чтобы оставшаяся сумма была равна 2023.

Решение: а) Прибавим к нашей сумме 1. Получим: $1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = \cdots = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11}$. Исходная сумма равна $2^{11} - 1 = 2047$.
б)

$$2023 = 2047 - 24$$

$$24 = 2^4 + 2^3.$$

Ответ: а) 2047, б) $2023 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2 + 1$.

▷ **6.** Пусть запись $a \nabla b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a + b$, а запись - $a \triangle b$ - наименьшее из чисел $a + b$ и $2b$.
Найдите все целые решения уравнения $x \nabla 20 = 23 \triangle x$.

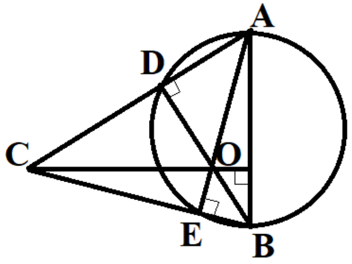
Решение:

Уравнение	Условие для уравнения	Полученное x	Подходящих x по условию
$x + 20 = 2x$	$x \leqslant 20$	$x = 20$	$= 20$
$x = x$	$20 \leqslant x \leqslant 23$	$x \in \forall$	$x = 20; 21; 22; 23$
$2x = 23 + x$	$x \geqslant 23$	$x = 23$	$x = 23$

Ответ: 20; 21; 22; 23.

▷ **7.** Даны окружность с проведённым в ней диаметром AB и точка C, не лежащая ни на окружности, ни на прямой AB. Как с помощью одной линейки опустить из точки C перпендикуляр на прямую AB? Центр окружности не дан.

Решение: Проведём прямые AC и BC.



Обозначим вторые их точки пересечения с окружностью соответственно через D и E. Углы $\angle ADB$ и $\angle AEB$ - прямые, т.к. вписаны в окружность и опираются на её диаметр AB. Поэтому AE и BD - высоты в $\triangle ABC$. Пусть O - точка их пересечения. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, прямая CO содержит третью высоту треугольника ABC и, следовательно, является искомым перпендикуляром.

▷ **8.** Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 2023?

Решение:

$$(5 \cdot 10^k + 2023)^2 = 25 \cdot 10^{2k} + 2023 \cdot 10^{k+1} + 2023^2$$

$$2023^2 = 4092529 \quad k = 6$$

$$5002023^2 = 25020234092529$$

Ответ: 5002023.

▷ **9.** Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$, $\text{НОК}(a, c) = 270$. Найти $\text{НОК}(b, c)$.
(НОК - наименьшее общее кратное).

Решение:

$$\text{НОК}(a, b) = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$\text{НОК}(a, c) = 270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Очевидно, что числа a, b и c можно представить в виде $a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, $b = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$, $c = 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5}$.
$\text{НОК}(b, c) = 2^{\lambda_2} \cdot 3^{\lambda_3} \cdot 5^{\lambda_5}$, где λ - наибольшее из чисел β и γ: $\lambda_i = max(\beta_i; \gamma_i), i = 2, 3, 5$.
Рассмотрим по отдельности каждый из множителей.
1) Допустим сначала, что в числе a есть двойка, то есть $\alpha_2 = 1$. Тогда в числе b должно быть две двойки, в противном случае их не было бы в $\text{НОК}(a, b)$. В числе c может либо не быть двоек, либо одна двойка.
Запишем этот случай в виде:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, \gamma_2 = 0 \text{ или } \gamma_2 = 1.$$

Выбирая наибольшее между β и γ, получаем $\tau_2 = 2$.
Рассуждая аналогично, получим:

$$\alpha_2 = 0, \beta_2 = 2, \gamma_2 = 1 \Rightarrow \tau_2 = 2.$$

2) Такие же рассуждения для тройки:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \gamma_3 = 3 \Rightarrow \tau_3 = 3.$$

$$\alpha_3 = 1, \beta_3 = 0 \text{ или } \beta_3 = 1 \gamma_3 = 3 \Rightarrow \tau_3 = 3.$$

3) Для пятёрки:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 1, \gamma_5 = 1 \Rightarrow \tau_5 = 5.$$

$$\alpha_5 = 1, \beta_5 = 0 \text{ или } \beta_5 = 1, \gamma_5 = 0 \text{ или } \ \gamma_5 = 1 \Rightarrow \tau_5 = 0 \text{ или } \tau_5 = 1.$$

Таким образом, $\text{НОК}(b, c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 108$ или $\text{НОК}(b, c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$.
Ответ: $\text{НОК}(b, c) = 108$ или $\text{НОК}(b, c) = 540$.

▷ **10.** Клетки шахматной доски занумерованы по рорядку числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд слева направо - числами от 1 до 8, вворой горизонтальный ряд слева направо - числами от 9 до 16 и т.д. На доске расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое наибольшее значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?

Решение: Напишем сверху над каждой вертикалью шахматной доски числа $1, 2, 3, \ldots, 8$, слева около каждой горизонтали - числа 0, 8, 16, 24, ..., 56; тогда можно считать, что в каждой клетке доски написана сумма двух чисел, соответствующих её вертикалям и горизонталям. Так как 8 ладей, стоящих на шахматной доске, не бьют друг друга, то обязательно в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит по одной ладье. Значит, в сумму номеров тех клеток, на которых стоят ладьи, войдут по одному разу все числа 1, 2, ..., 8, соответствующие разным вертикалям, и по одному разу все числа 0, 8, 16, ..., 56, соответсвующие разным горизонталям. Поэтому сумма номеров всегда будет иметь одно и то же значение: $1+2+3+\cdots+8+0+8+16+\cdots+56 = 260$.
Ответ: 260.